

ĐỀ 8

Câu 1. Cho 5 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số tam giác có được từ các điểm đã cho

A. 3!

B. A_5^3 C. C_5^3

D. 7!

Giải

Mỗi tam giác tương ứng với một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử. Số tam giác là C_5^3

Chọn **C**

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_9 = 13$. Giá trị u_{2021} bằng

A. 4037

B. 4040

C. 2033

D. 4033

Giải

$$u_9 = u_1 + 8d \text{ suy ra } d = \frac{u_9 - u_1}{8} = \frac{13 + 3}{8} = 2$$

$$u_{2021} = u_1 + 2020d = -3 + 4040 = 4037$$

Chọn **A**

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3		1		7		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+	0	-
$f(x)$								

Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào sau đây

A. $(-\infty, 3)$ B. $(-3, 1)$ C. $(-2, 8)$ D. $(1, +\infty)$ **Giải**

Từ BBT suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 7)$ do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$

Chọn **B**

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-5		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+		-	0	+
$f(x)$										

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = -5$ B. $x = -5, x = 1$ C. $x = -3$ D. $x = 2, x = -3$ **Giải**

Từ BBT suy ra hàm số có hai điểm cực đại $x = -5, x = 1$

Chọn **B**

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3		-1		3		5		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		+	0	+		+	0	-

Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

Giải

Từ BBT suy ra hàm số có ba điểm cực trị $x = -3, x = -1, x = 8$

Chọn **C**

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-5x+6}$

A. $x = 2, x = 3$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = -3$

Giải

TXĐ $D = (3; +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Chọn **B**

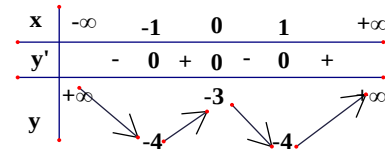
Câu 7. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

A. $y = x^4 - 3x^2 - 3$

B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$

C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$

D. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

**Giải**

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1; -4)$

Chọn **C**

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3x-4}{x-2}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1

B. -4

C. 2

D. -2

Giải

Thế $x = 0$ vào biểu thức của hàm số ta được $y = 2$

Chọn **C**

Câu 9. Cho $\log 3 = a$, $\log 2 = b$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $\log_2 3 = \frac{a}{b}$

B. $\log_5 3 = \frac{a}{1-b}$

C. $\log 2,25 = \frac{a}{b}$

D. $\log 1,2 = a + 2b - 1$

Giải

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{A đúng}$$

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{a}{\log \frac{10}{2}} = \frac{a}{\log 10 - \log 2} = \frac{a}{1-b} \Rightarrow \text{B đúng}$$

$$\log 2,25 = \log \frac{9}{4} = \log \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2(\log 3 - \log 2) = 2(a - b) \text{ suy ra C sai}$$

Chọn **C**

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ là

A. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

B. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \log 3$

C. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$

D. $-\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$

Giải

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln \left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln 3$$

Chọn **D**

Câu 11. Giá trị của tham số a để hàm số $y = (2a - 1)^x$ là hàm số mũ:

- A. $1 < a$ B. $a \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

Giải

$$y = (2a - 1)^x \text{ là hàm số mũ } \begin{cases} 2a - 1 > 0 \\ 2a - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 1 \\ 1 < a < +\infty \end{cases}$$

Chọn **B**

Câu 12. Tập nghiệm của phương trình $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ là:

- A. $\{-2\}$ B. $\{\frac{1}{2}\}$ C. $\{2\}$ D. $\{-\frac{3}{2}\}$

Giải

$$3^x \cdot 2^{x+1} = 72 \Leftrightarrow 3^x \cdot 2^x \cdot 2 = 72 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Chọn **C**

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(2^x - 1) = -2$ là:

- A. $\{\log_2 5 - 2\}$ B. $\{\log_2 5\}$ C. $\{2 + \log_2 5\}$ D. $\{-1 + \log_2 5\}$

Giải

$$\log_2(2^x - 1) = -2 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 2^{-2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \log_2 5 - \log_2 4 \Leftrightarrow x = \log_2 5 - 2$$

Chọn **A**

Câu 14. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^x(1 - 3e^{-2x})$ bằng:

- A. $F(x) = e^x - 3e^{-x} + C$ B. $F(x) = e^x + 3e^{-2x} + C$ C. $F(x) = e^x + 3e^{-x} + C$ D. $e^x + 3e^{-3x} + C$

Giải

$$f(x) = e^x(1 - 3e^{-2x}) = e^x - 3e^{-x}$$

$$F(x) = \int f(x).dx = \int (e^x - 3e^{-x}).dx = e^x + 3e^{-x} + C$$

Chọn **C**

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

- A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \cos 3x + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{-1}{3} \cos 3x + C$ C. $\int f(x)dx = 3 \cos 3x + C$ D. $\int f(x)dx = -3 \cos 3x + C$

Giải

Chọn **B**

Câu 16. Cho $\int_1^5 f(x)dx = 3, \int_1^2 f(x)dx = -2$. Tính $I = 3 \int_2^5 f(x)dx$

- A. 15 B. -15 C. 3 D. -3

Giải

$$I = 3 \int_2^5 f(x)dx = 3 \left(\int_1^5 f(x).dx - \int_1^2 f(x).dx \right) = 3[3 - (-2)] = 15$$

Chọn **A**

Câu 17. Số phức liên hợp của $z = (1 + i)(3 - 2i) + \frac{1}{3 + i}$ là

A. $w = \frac{13}{10} - \frac{9}{10}i$.

B. $w = 5 - \frac{3}{10}i$.

C. $w = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$.

D. $w = \frac{53}{10} + \frac{9}{10}i$.

Giải

Sử dụng máy tính cầm tay ta có $z = \frac{53}{10} + \frac{9}{10}i \Rightarrow \overline{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$

Chọn **C**

Câu 18. Tính $I = \int_0^1 x^2(x+1)dx$.

A. $I = \frac{7}{12}$.

B. $I = \frac{5}{6}$.

C. $I = \frac{11}{6}$.

D. $I = \frac{1}{12}$.

Giải

Sử dụng máy tính cầm tay ta có $I = \int_0^1 x^2(x+1)dx = \frac{7}{12}$

Chọn **A****Câu 19.** Cho hai số phức $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 3-i$. Mô đun của số phức $z_1.z_2$.

A. $|z_1.z_2| = \sqrt{10}$.

B. $|z_1.z_2| = 10$.

C. $|z_1.z_2| = 5$.

D. $|z_1.z_2| = \sqrt{5}$.

Giải

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = |1+3i|.|3-i| = \sqrt{10}\sqrt{10} = 10$

Chọn **B****Câu 20.** Cho số phức $z = \frac{2+3i}{2-i}$. Điểm biểu diễn M của số phức z là:

A. $M(\frac{-1}{5}, \frac{8}{5})$.

B. $M(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5})$.

C. $M(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$.

D. $M(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$.

Giải

$z = \frac{2+3i}{2-i} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

Chọn **D****Câu 21.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và SA = 3a. Thể tích của khối chóp S.ABCD bằng

A. $\frac{a^3}{3}$

B. $3a^3$

C. a^3

D. $9a^3$

Giải

$V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3a.a^2 = a^3$

Chọn **C****Câu 22.** Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón đó.

A. $36\pi a^2$

B. $20\pi a^2$

C. $15\pi a^2$

D. $24\pi a^2$

Giải

Ta có $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$

$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi.r.l + \pi.r^2 = 20\pi.a^2 + 16\pi.a^2 = 36\pi.a^2$

Chọn **A**

Câu 23. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông có diện tích bằng 8. Tính diện tích xung quanh của hình trụ này.

- A. 8π B. 12π C. 6π D. 20π

Giải

Thiết diện qua trục là hình vuông có diện tích bằng 8, suy ra $h = 2R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi.R.h = 2\pi.\sqrt{2}.2\sqrt{2} = 8\pi$$

Chọn **A**

Câu 24. Cho một khối trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π . Tính thể tích của khối trụ đó.

- A. $\frac{640\pi}{3}$ B. 640π C. $\frac{160\pi}{3}$ D. 160π .

Giải

Khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, suy ra $h = 10$

$$S_{xq} = 80\pi \Leftrightarrow 2\pi R.h = 80\pi \Rightarrow R = 4$$

$$V = \pi.R^2.h = 160\pi$$

Chọn **D**

Câu 25. Cho $A(1; 1; -2); B(3; 1; 0); C(2; -5; -1)$. Khi đó tọa độ trọng tâm tam giác ABC là

- A. $G(2; -1; -1)$ B. $G(6; -3; -3)$ C. $G(3, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{2})$ D. $G(2, \frac{-5}{2}, 0)$

Giải

Trọng tâm $G(2; -1; -1)$

Chọn **A**

Câu 26. Mặt cầu tâm $I(2; -3; 1)$, bán kính $R = 5$ có phương trình là

- A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5$ B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5^2$
C. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$ D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5^2$

Giải

Ta có pt mặt cầu $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5^2$

Chọn **D**

Câu 27. Mặt phẳng (α) qua $M(-3, 0, 4)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, -1, 3)$ có phương trình là

- A. $2x - y + 3z - 6 = 0$ B. $2x - y + 3z + 6 = 0$ C. $-3x + 4z - 6 = 0$ D. $-3x + 4z + 6 = 0$

Giải

$$P_{\text{mp}}(\alpha): 2(x+3) - (y-0) + 3(z-4) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z - 6 = 0$$

Chọn **A**

Câu 28. Đường thẳng d qua $M(-3, 0, 4)$, với vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2, -1, 3)$ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ B. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{3}$ C. $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ D. $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Giải

d có phương trình chính tắc : $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$

Chọn **C**

Câu 29. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt mà 3 chữ số này có tổng bằng 10

A. 15

B. 40

C. 20

D. 24

Giải

TH1: Có bốn tập hợp, mỗi tập hợp chứa 3 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 0 và tổng của 3 chữ số này bằng 10

* {0, 1, 9}, {0, 2, 8}, {0, 3, 7}, {0, 4, 6}. Mỗi tập hợp trên có thể tạo ra $2.2.1 = 4$ số

TH1: Có bốn tập hợp, mỗi tập hợp chứa 3 chữ số khác nhau trong đó **không** có chữ số 0 và tổng của 3 chữ số này bằng 10

* {1, 2, 7}, {1, 3, 6}, {1, 4, 5}, {2, 3, 5}. Mỗi tập hợp trên có thể tạo ra $3! = 6$ số

Vậy có tất cả là $4.4 + 4.6 = 40$ số. Chọn **B**

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên R

A. $y = \tan x$

B. $y = x^4 + x^2 + 1$

C. $y = x^3 + 1$

D. $y = \frac{4x+1}{x+2}$

Giải

Xét $y = x^3 + 1$ có $y' = 3x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chọn **C**

Câu 31. Gọi a, b lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

Khi đó tổng $a + b$ là:

A. 0

B. -2

C. -3

D. 2

Giải

Ta có $a + b = f(0) + f(3) = -3 + 0 = -3$. Chọn **C**

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(3; +\infty)$.

C. $(-1; 3)$

D. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Giải

$3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Chọn **C**

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân

$\int_0^3 [x - 2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. 7.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 5.

D. $\frac{1}{2}$.

Giải

$\int_0^3 [x - 2f(x)]dx = \int_0^3 x dx - 2 \int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$. Chọn **D**

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(1+2i)z + (2-2i)\bar{z} = i$. Tính mô-đun của z .

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{3}$

Giải

Đặt $z = x + yi$, (x, y thuộc $\mathbb{R}$)

$$(1+2i).z + (2-2i).\bar{z} = i \Leftrightarrow (1+2i)(x+yi) + (2-2i)(x-yi) = i$$

$$\Leftrightarrow (3x-4y) + (-yi) = i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ -y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{5}{3}$$

Chọn **B**

Cách khác

Sử dụng mệnh đề: Cho 4 số phức A, B, C, z thỏa $|A| \neq |B|$, $A.z + B.\bar{z} = C$ thì $z = \frac{\bar{A}.C - B.\bar{C}}{|A|^2 - |B|^2}$

$$\text{Ta có } (1+2i).z + (2-2i).\bar{z} = i \Leftrightarrow z = \frac{(1-2i).i - (2-2i).(-i)}{5-8} = -\frac{4}{3} - i$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{5}{3}$$

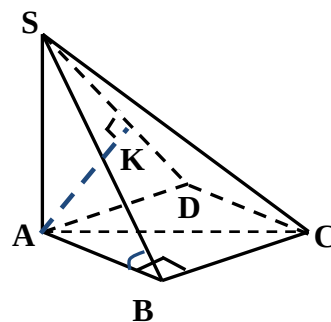
Chọn **B**

Câu 35. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng :

- A. a B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Giải

$(SBC) \cap (ABC) = BC$, $AB \perp BC$, $SB \perp BC$ suy ra góc tạo bởi 2 mặt phẳng (ABC) và (SBC) là góc SBA



Dựng hình vuông ABCD, ta có AB song song với CD suy ra AB song song với mp(SCD)

Chọn mp(SCD) chứa SC và song song với AB, khi đó khoảng cách giữa AB và SC bằng khoảng cách từ A đến mp(SCD). Dựng AK vuông góc với SD, chứng minh được AK vuông góc với mp(SCD)

$$\Rightarrow AK = d[A, (SCD)] = d(AB, SC)$$

Tam giác SAB vuông tại A có $SA = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Tam giác SAD vuông tại A có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$

Suy ra $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chọn **D**

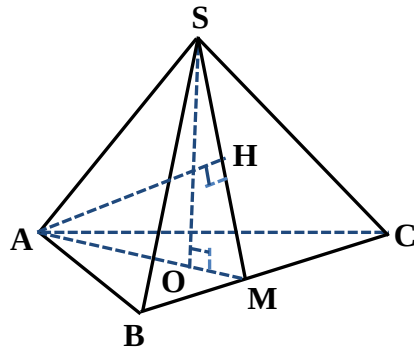
Câu 36. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a , chiều cao khối chóp bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

C. $\frac{5a}{6}$

D. $\frac{6a}{7}$

Giải

Cách 1: Gọi M là trung điểm của BC, O là trọng tâm tam giác đều ABC. Khi đó SO vuông góc với mp(ABC)

Trong mp(SAM), dựng AH vuông góc với SM tại H

Ta có AM vuông góc với BC, SO vuông góc BC, suy ra BC vuông góc với mp(SAM) suy ra BC vuông góc với AH. Do đó AH vuông góc với mp(SBC)

$$\Rightarrow d[A, (SBC)] = AH$$

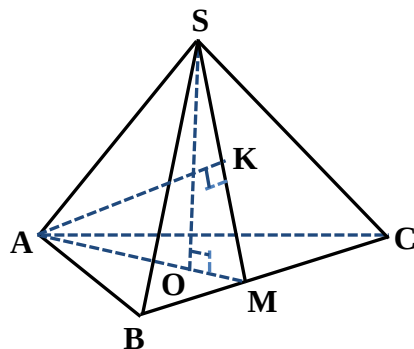
$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{7a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Trong } \triangle SAM, AH \cdot SM = SO \cdot AM \Rightarrow AH = \frac{SO \cdot AM}{SM} = \frac{2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{7a}{2\sqrt{3}}} = \frac{6a}{7}$$

Cách 2: Gọi M là trung điểm của BC, O là trọng tâm tam giác đều ABC. Khi đó SO vuông góc với mp(ABC)

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{7a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{7a}{2\sqrt{3}} \cdot a = \frac{7a^2}{4\sqrt{3}}$$



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Dựng AK vuông góc với mp(SBC) tại K

$$\Rightarrow d[A, (SBC)] = AK$$

$$V_{A.SBC} = \frac{1}{3} \cdot AK \cdot S_{\Delta SBC} \Rightarrow AK = \frac{3 \cdot V_{A.SBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}}{\frac{7a^2}{4\sqrt{3}}} = \frac{6a}{7} \quad \text{Chọn D}$$

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(2; -3; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz)?

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 2$

B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 4$

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 2$

D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 4$

Giải

$$R = d[I, (Oyz)] = |x_I| = 2$$

Phương trình mặt cầu: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 4$

Chọn **D**

Câu 38. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(-1; 0; 2), B(1; 2; -1), C(-3; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm của tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng AB là:

A. (P): $x+y-z-3=0$ B. (P): $2x+2y-3z+3=0$ C. (P): $2x+2y-3z+1=0$ D. (P): $2x+2y+3z-3=0$

Giải

$$\overrightarrow{AB} = (2; 2; -3), G(-1; 1; 1)$$

(P) có phương trình $2x + 2y - 3z + 3 = 0$

Chọn **B**

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2, 2]$ có đồ thị của hàm số

$y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại x_0 trên $[-2; 2]$

A. $x_0 = 2$.

B. $x_0 = -1$.

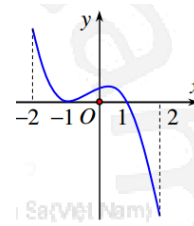
C. $x_0 = -2$.

D. $x_0 = 1$.

Giải

Từ đồ thị ta có BBT sau

x	-2	-1	1	2		
f'(x)		+	0	+	0	-
f(x)						



Hàm số đạt GTLN tại $x_0 = 1$

Chọn **D**

Câu 40. Cho hai điểm $A(2, 0, 0), M(1, 1, 1)$, mặt phẳng (P) qua hai điểm A, M lần lượt cắt các tia Oy, Oz tại B $(0, b, 0), C(0, 0, c)$. Biết diện tích tam giác ABC nhỏ nhất, khi đó giá trị $P = 2b - 3c$ bằng

A. -4

B. 0

C. 4

D. -2

Giải

(P): $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, ta có $M(1, 1, 1) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b + c = \frac{bc}{2} (*)$, $(b, c > 0)$

$\overrightarrow{AB} = (-2; b; 0), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; c) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc, 2c, 2b)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(bc)^2 + (2c)^2 + (2b)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(bc)^2 + 4(b^2 + c^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(bc)^2 + 4[(b+c)^2 - 2bc]} \quad , \quad (1)$$

Từ (*) và (1) suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(bc)^2 - 8(bc)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2t^2 - 8t}$, với $t = bc > 0$

$S_{\Delta ABC}$ nhỏ nhất khi $2(bc)^2 - 8bc$ nhỏ nhất tức là $2t^2 - 8t$ nhỏ nhất

Theo BĐT Cauchy ta có $b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{bc}{2} \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{(bc)^2}{4} \geq 4(bc) \Rightarrow (bc)^2 - 16(bc) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} bc \leq 0, (\text{loại}) \\ bc \geq 16 \end{cases} \Rightarrow t \geq 16$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t$, với $t \geq 16$ ta có $f'(t) = 4t - 8 > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[16; +\infty)$ do đó $f(t)$ đạt GTNN khi $t = 16$, dấu bằng trong BĐT Cauchy xảy ra khi $b = c$ mà $b \cdot c = 16$ nên $b = c = 4$ Suy ra $P = 2b - 3c = -4$. Chọn **A**

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & 1 \leq x \\ 5 - x & x < 1 \end{cases}$ Tính $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$.

A. $I = \frac{71}{6}$.

B. $I = 31$.

C. $I = 40$.

D. $I = \frac{32}{3}$.

Giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, $x = 0$ suy ra $t = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ suy ra $t = 1$

Đặt $u = 3 - 2x \Rightarrow du = -2 dx$, $x = 0$ suy ra $u = 3$; $x = 1$ suy ra $u = 1$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 f(t) dt + 3 \int_3^1 f(u) \frac{du}{-2} = 2 \int_0^1 f(t) dt + \frac{3}{2} \int_1^3 f(u) du \\ &= 2 \int_0^1 f(t) dt + \frac{3}{2} \int_1^3 f(u) du = 2 \int_0^1 (5 - x) dx + \frac{3}{2} \int_1^3 (x^2 + 3x) dx = 9 + 31 = 40. \text{ Chọn } \mathbf{C} \end{aligned}$$

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z + \bar{z}$ là số thuần ảo và $|z - 2i| = 1$

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4

Giải

Đặt $z = x + yi$, điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z

$$(1+i)z + \bar{z} = (1+i)(x+yi) + x-yi = 2x - y + xi$$

$(1+i)z + \bar{z}$ thuần ảo $\Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow$ điểm biểu diễn M thuộc (d): $2x - y = 0$

$|z - 2i| = 1 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C): $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ có tâm $I(0, 2)$, bk $R = 1$

Mà $d[I, (d)] = \frac{2}{\sqrt{5}} < R = 1 \Rightarrow$ (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, M'

$\Rightarrow$ có 2 số phức thỏa đề bài. Chọn **A**

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, góc giữa mp (SBC) và (ABC) bằng 60° , $SA = a\sqrt{3}$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tứ diện $S.BCD$.

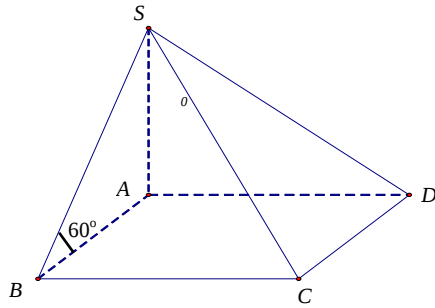
A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Giải



Chứng minh được góc giữa hai mp(SBC) và (ABC) là góc SBA

$$\frac{SA}{AB} = \tan 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$$

$$V_{S.BCD} = \frac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot AD = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}. \text{ Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 44. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2 + 2\log_2 x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} y$. Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = 10x^2 - 2(x + y) - 3$ là

A. $-\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{7}{2}$.

D. -3 .

Giải

Với hai số thực dương x, y ta có: $2 + 2\log_2 x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} y \Leftrightarrow \log_2(4x^2) = \log_2 y \Leftrightarrow 4x^2 = y$.

Khi đó $P = 10x^2 - 2x - 2 \cdot 4x^2 - 3 = 2x^2 - 2x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \geq -\frac{7}{2}, \forall x > 0$. Mà $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{7}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Chọn **C**

Chú ý: $P = 2x^2 - 2x - 3$ suy ra $P' = 4x - 2$. Cho $P' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, $\min P = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$. Chọn **C**

Câu 45. Cho $A(2;0;-3), B(4;-2;-1), (P): x + y + 2z + 4 = 0$. Đường thẳng (d) chứa trong (P) sao cho mọi điểm thuộc (d) cách đều A và B có vectơ chỉ phương là:

A. $(1; -1; 1)$

B. $(3; 1; -2)$

C. $(1; 1; 2)$

D. $(-1; 0; -2)$

Giải

M cách đều A, B $\Rightarrow M$ thuộc mp(Q) với (Q) là mặt trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow$ (d) chứa trong mp(Q) mà (d) chứa trong (P) nên (d) là giao tuyến của (P) và (Q)

$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q), $\overrightarrow{n_P} = (1; 1; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) $\Rightarrow$ (d) có VTCP $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}] = (-6, -2, 4) = -2(3; 1; -2)$

Chọn **B**

Câu 46. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm

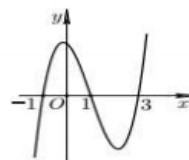
cực tiểu của hàm số $f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là:

A. 1

B. 2

C. 4

D. 3



Giải

$$\text{Xét } g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right), x \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -1, (\text{VN}) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1, (\text{nghiệm kép bậc 2}) \\ x = -1 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$						

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu. Chọn **B**

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên dương y để tập nghiệm của bất phương trình

$$(\log_2 x - \sqrt{2})(\log_2 x - y) < 0 \text{ chứa tối đa 1000 số nguyên.}$$

A. 9

B. 10

C. 8

D. 11

Giải

$$\text{TH1: Nếu } y < \sqrt{2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (\log_2 x - \sqrt{2})(\log_2 x - y) < 0 \Leftrightarrow 1 < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 < x < 2^{\sqrt{2}}.$$

Tập nghiệm không chứa số nguyên nào, ta loại $y = 1$

TH2. Nếu $y > \sqrt{2}$, ta có Bảng xét dấu sau

x	0	$2^{\sqrt{2}}$		2^y		
f(x)		+	0	-	0	+

$$\Rightarrow (\log_2 x - \sqrt{2})(\log_2 x - y) < 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{2}} < x < 2^y. \text{ Tập nghiệm của BPT chứa tối đa 1000 số nguyên}$$

$$\{3; 4; \dots; 1002\} \Leftrightarrow 2^y \leq 1003 \Leftrightarrow y \leq \log_2 1003 \approx 9,97 \Rightarrow y \in \{2; \dots; 9\} \text{ suy ra có 8 số } y \text{ thỏa đề bài. Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = g(x) = xf(x^2)$ có đồ thị trên đoạn $[0; 2]$ như hình

vẽ bên. Biết diện tích miền được tô màu là $S = \frac{5}{2}$, tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$

A. $I = \frac{5}{4}$

B. $I = \frac{5}{2}$

C. $I = 5$

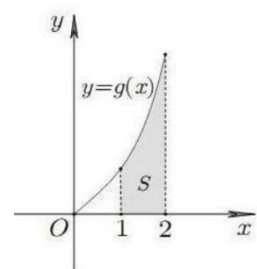
D. $I = 10$

Giải

$$S = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 x f(x^2) dx = \frac{5}{2}, \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi $x = 1$ thì $t = 1$, khi $x = 2$ thì $t = 4$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt = \frac{5}{2} \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = 5$$



Chọn **C****Câu 49.** Cho số phức z có $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của

$$P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$$

A. $\frac{13}{4}$

B. 3

C. 5

D. $\sqrt{3}$

Giải

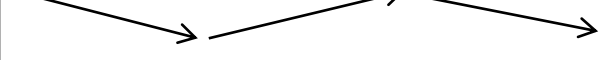
Ta có $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, $z = x + yi$, (x, y thuộc $\mathbb{R}$), $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Suy ra $x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} P &= |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z^2 - z \cdot (z \cdot \bar{z})| + |z^2 + z + (z \cdot \bar{z})| \\ &= |z^2(1 - \bar{z})| + |z(z + 1 + \bar{z})| = |z^2| |1 - \bar{z}| + |z| |z + 1 + \bar{z}| = |1 - \bar{z}| + |z + 1 + \bar{z}| \\ &= |1 - (x - yi)| + |x + yi + 1 + x - yi| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(2x+1)^2} \\ &= \sqrt{1-2x+x^2+y^2} + |2x+1| = \sqrt{2-2x} + |2x+1| = f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1+\sqrt{2-2x} & \text{khi } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ -2x-1+\sqrt{2-2x} & \text{khi } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$$

BBT

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$				

$$f(-1) = 1, \quad f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4} \Rightarrow \text{Max} P = \frac{13}{4}$$

Chọn **A**

Câu 50. Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau đôi một. Gọi C là điểm cố định trên Oz , biết $OC = 1$. Các điểm A, B thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\sqrt{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Giải

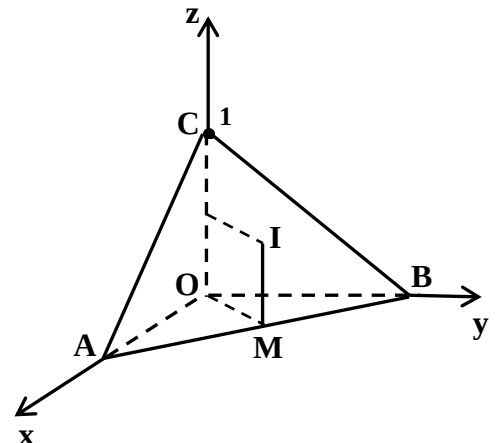
$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, 1)$ Tâm mặt cầu là

$$I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ với } a + b = 1 \quad (a, b > 0)$$

$$R = OI = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho 4 số $1, 1, a, b$ ta có

$$|1 \cdot a + 1 \cdot b| \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 + 1 \geq \frac{3}{2}$$



$$\Rightarrow R \geq \frac{\sqrt{6}}{4} \quad . \quad \text{Dấu bằng xảy ra khi } a = b = \frac{1}{2}$$

Bán kính OI nhỏ nhất là $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Chọn **C**